

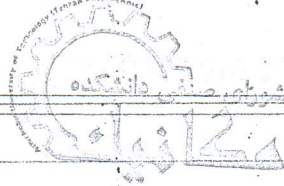
بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک ماشین

نام استاد: دکتر اسلامی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر



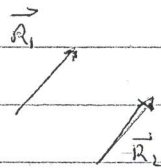
Unit II

Velocity Analysis of Linkages

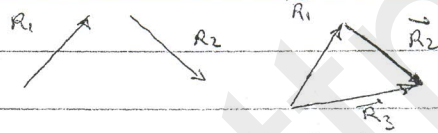
Objective 1:

تعیین بردارها و خواص آن ها:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 \quad \text{اندازه بردار مساوی}$$

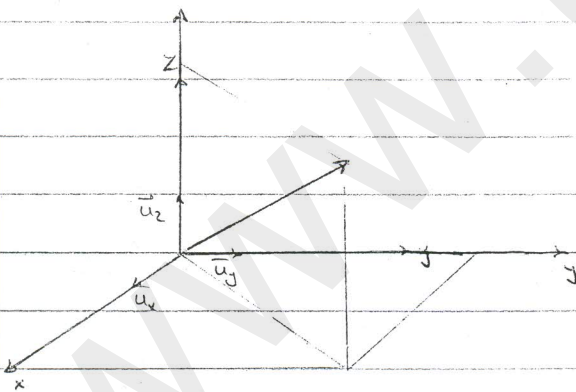


۲. جمع دو بردار



$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

۳. بردار بر حسب مؤلفه ها:



$$\vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

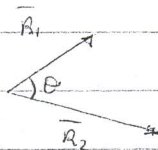
$$\vec{R} = r\vec{u}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{u} = \frac{x}{r}\vec{u}_x + \frac{y}{r}\vec{u}_y + \frac{z}{r}\vec{u}_z$$

۴. حاصلضرب داخلی (dot product)

$$R_1 \cdot R_2 = R_1 R_2 \cos \theta$$



محصول خارجی (cross product)

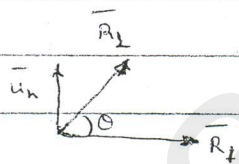
$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z$$

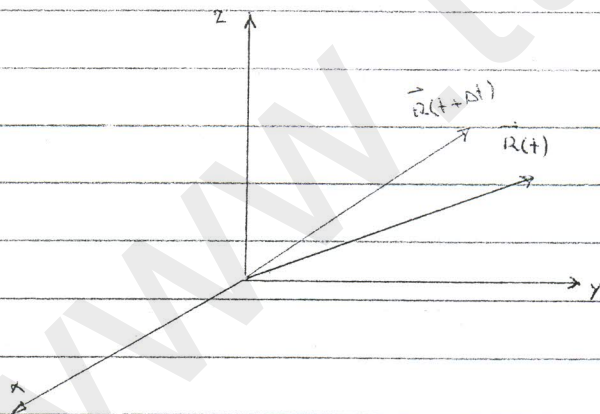
$$\vec{R}_2 = x_2 \vec{u}_x + y_2 \vec{u}_y + z_2 \vec{u}_z$$

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = R_1 R_2 \sin \theta \vec{u}_n$$



مشتق یک بردار نسبت به زمان

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$



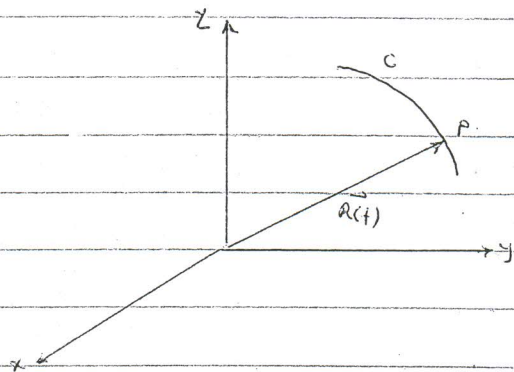
objective 2

تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر

مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (velocity) است

2. تعریف velocity یک ذره حرکت در فضاهای سه بعدی position vector نسبت

برایان



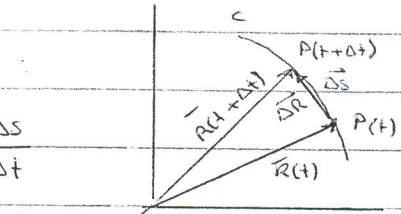
$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{xyz}$$

از سیستم‌های مختصات به حساب مختصات مسیر (coordinate systems in term of path variable)

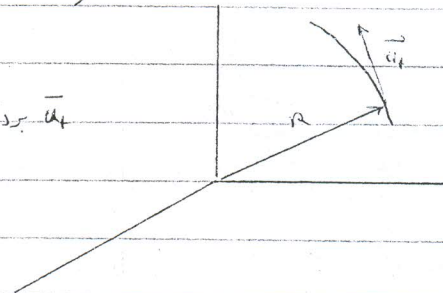
در یک ذره‌ی متحرک روی مسیری که در فضای مختصات xyz مشخص باشد، حالت حرکت است.

بنابراین سرعت ذره‌ی P برابر است با $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{xyz}$ یا برابر است با:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{xyz} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \end{aligned}$$



که بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است

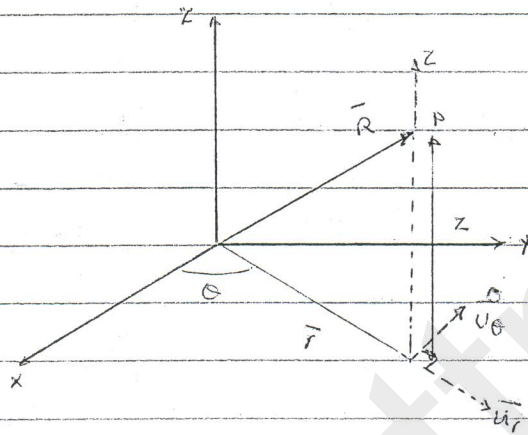


$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

گورگنات استرادی

از این گورگنات برای استفاده در مبدل نیروی مسیر دایره‌ای حرکت نماید و برای حرکت دورانی

باشد.



$$\vec{R} = \vec{r} \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

تایید سرعت velocity در P برابر است با:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{u}_r + \vec{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z + z \frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

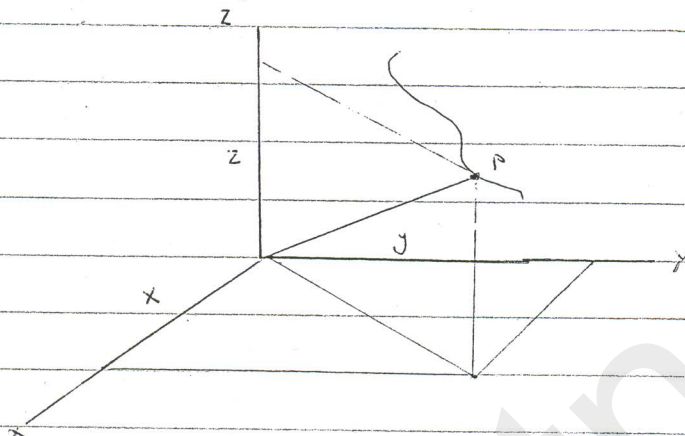
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \vec{r} \ddot{\theta} \vec{u}_r + z \ddot{z} \vec{u}_z$$

Part II سیستم در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است:



$$\vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

objective 3 :

کاربرد اعداد مختلط :

$$R = re^{j\theta}$$

یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود :

r = magnitude

θ = argument

$$j = \sqrt{-1}$$

$$R = r(\underbrace{\cos\theta}_{\text{real part}} + \underbrace{j\sin\theta}_{\text{imaginary part}})$$

$$R = a + jb$$

برای عدد مختلط زیر :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

جمع اعداد مختلط :

$$R_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$R_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} = r_1 \cos \theta_1 + j r_1 \sin \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + j r_2 \sin \theta_2$$

$$= \underbrace{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)}_{\text{Real}} + j \underbrace{(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)}_{\text{imaginary}}$$

تطبيق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد مختلط :

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) + j (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)$$

تطبيق بر تفریق بردارها است.

حاصل ضرب اعداد مختلط :

$$R_1 \cdot R_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تطبيق بر هنج نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) نمی باشد.

تقسیم اعداد مختلط :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

مشتق بردارها :

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

منطبق بر مشتق بردارها است.

در بردارها : $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ و $\bar{R} = r\bar{u}_r$ با مقایسه با مشتق بردارها :

$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\bar{u}_r = e^{j\theta}$$

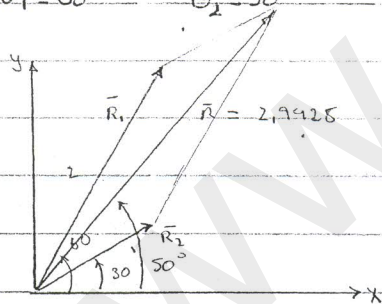
$$\bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

$$r_1 = 2$$

$$r_2 = 1$$

$$\theta_1 = 60^\circ$$

$$\theta_2 = 30^\circ$$



مثال : حالت مختلف برداری را حل کنید :

اگر بردار بودند

اگر مختلط باشند

$$R_1 = 2e^{j60}$$

$$R_2 = 1e^{j30}$$

$$R_1 + R_2 = 2\cos 60 + j2\sin 60 + 1\cos 30 + j\sin 30$$

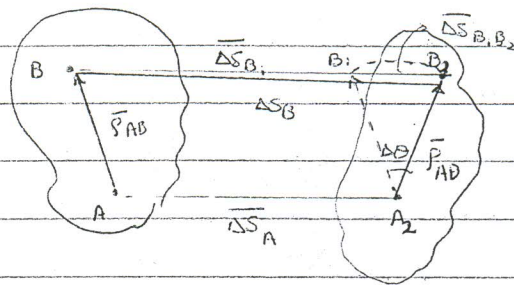
$$= (2\cos 60 + \cos 30) + j(2\sin 60 + \sin 30) = 1.866 + j2.232 = R_3$$

$$r_3 = \sqrt{1.866^2 + 2.232^2} = 2.4928$$

$$\bar{\theta}_3 = \tan^{-1} \frac{2.232}{1.866} = 50^\circ$$

objective 4:

تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



pure translation حرکت خالص است. سرعت جسمی تنها یکسان باشد

طبق قضیه chaslev هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک

pure rotation به علاوه یک

$$\Delta S_B = \Delta S_{B_1} + \Delta S_{B_1 B_2} \quad \text{از روی شکل:}$$

$$\Delta S_B = \Delta S_A + \Delta S_{B_1 B_2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_{B_1 B_2}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (a) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (b)$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (c)$$

رابطه (b) یک حالت برداری است 8

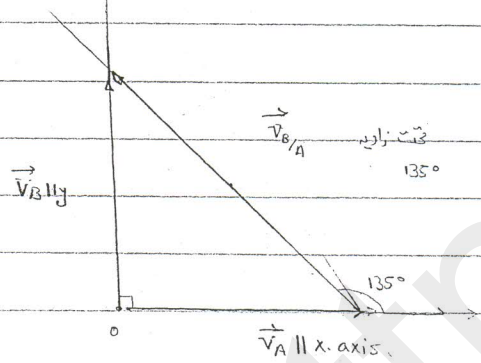
مثال: شتاب یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

1- $\vec{V}_A$ برابر 20 in/s مؤزی محور x

2- $\vec{V}_B$ مؤزی محور y حرکت می کند

3- $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° با محور x حرکت می کند

مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$



$$1 \text{ in} = 10 \text{ in/sec}$$

1- مقیاس و تبدیل مقیاسی انتخاب می کنیم

2- سرعت $\vec{V}_A$ را از مبدأ O رسم می کنیم

3- سرعت نقطه B :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

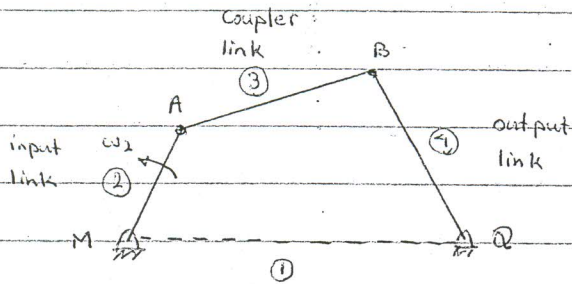
چون از جهت برداری بالا $\vec{V}_A$ معلوم $\vec{V}_B \parallel y$ و $\vec{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° مثبت x می باشد

مثبت برداری قابل ترسیم است

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = 20 \text{ in/sec} \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2} \text{ in/sec} \end{array} \right.$$

objective 5

مکانیزم های چهار میله ای ساده

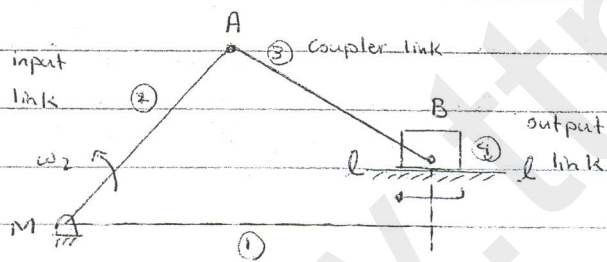


هدف: سرعت دورانی ساده و با انتخاب

ابعاد مناسب یک حرکت دلخواه را بدست

آوریم

Four bar linkage system

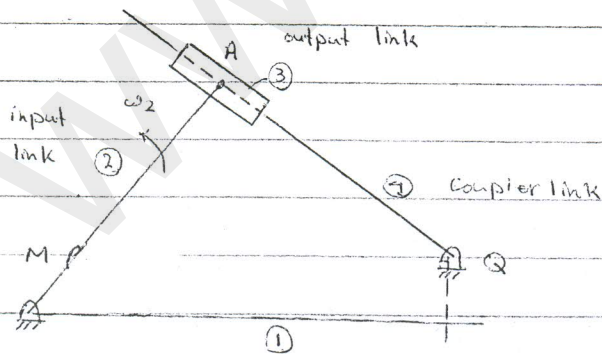


هدف: با سرعت دورانی ساده و با

انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی

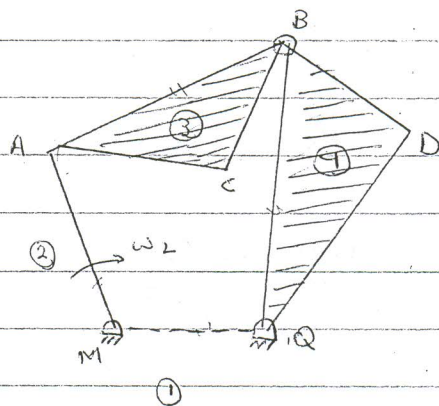
دلخواه را بدست می آوریم

Slider crank mechanism



Inverted slider crank mechanism

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم زیر



$$MA = 4''$$

$$AB = 8''$$

$$QB = 5.5''$$

$$MQ = 5''$$

$$\omega_2 = 94.2 \text{ rad/sec}$$

ترسیم:

$$1m \quad 10 \text{ ft/sec}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

1- چپ‌ر Q و میانه‌های مناسب انتخاب می‌شود

$$V_A = MA \cdot \omega_2 = 94.2 \times 4 = 376.8 \times \frac{1}{12} = 31.4 \text{ ft/sec} \quad \underline{\underline{1 \text{ MA}}}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

2- سرعت نقطه A

چون $V_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر QB می‌باشد

لزاماً نقطه برخورد قابل ترسیم است.

$$V_{B/A} = 20 \text{ ft/sec}$$

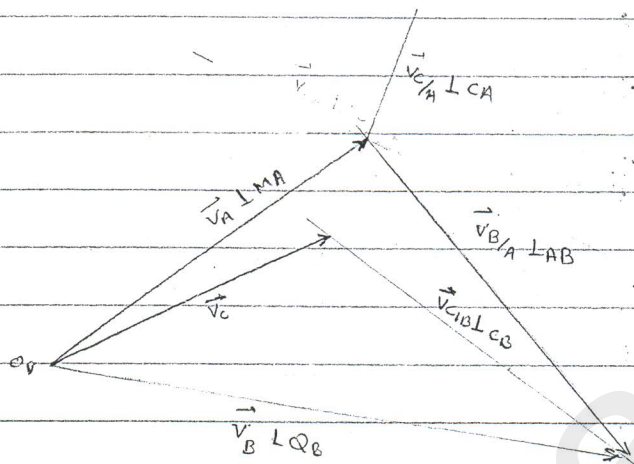
3- سرعت نقطه B

$$V_B = 34 \text{ ft/sec}$$

4- با استفاده از میانه

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = \frac{34}{5.5} \times 12 = 74.2 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت}$$



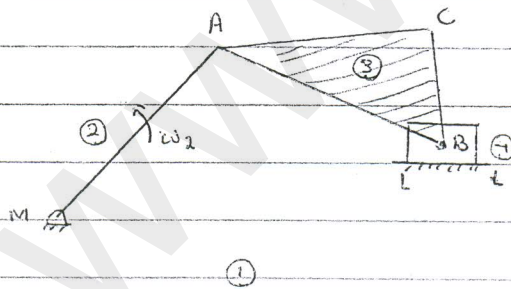
5. سرعت نقطه C:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{C/A}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}$$

چون $\vec{v}_{C/A}$ عمود بر CA و $\vec{v}_{C/B}$ عمود بر BC باشد لذا از تعلق در یک راستای برداری بالا $\vec{v}_C$ بدست می آید.

مثال: منظور از سرعت دیالیز سرعت یک slider crank mechanism



$$MA = 2''$$

$$AB = 3''$$

$$AC = 1.5''$$

$$\omega_2 = 600 \text{ rpm}$$

$$\text{lin } 5.23 \text{ ft/sec}$$

1. مقدار O_v و مقادیر نسبی و تعلق

$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8 \text{ rad/sec}$$

2. سرعت نقطه A:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_M + \vec{v}_{A/M} \Rightarrow v_{A/M} = \omega_2 \times AM = 62.8 \times \frac{2}{12} = 10.46 \text{ ft/sec} \perp MA \quad 2$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

3- سرعت نقطه B

چون $\vec{v}_{B/A}$ عمود بر AB و $\vec{v}_B$ موازی LL است لذا مثلث برداری قابل ترسیم است

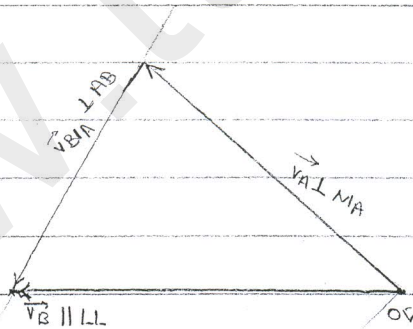
4- با استفاده از متیاس

$$v_B = 10.46 \text{ ft/sec}$$

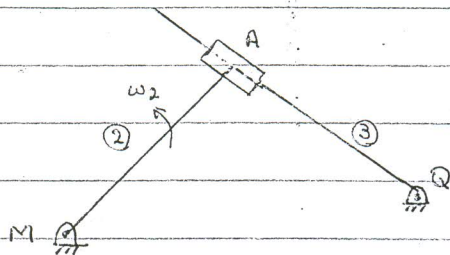
$$v_{B/A} = 6.54 \text{ ft/sec}$$

5- سرعت دورانی چرخ

$$\omega_3 = \frac{v_{B/A}}{AB} = \frac{6.54}{3} \times 12 = 26.16 \text{ rad/sec (ساعت)}$$



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت ماشین
inverted slider crank



$$MA = 2''$$

$$MQ = 4.1''$$

$$n_2 = 600 \text{ rpm}$$

$$QA = 3''$$

ترسیم:

$$v_A = 5.23 \text{ ft/sec}$$

۱. دیاگرام v و مقیاس مناسب بافتخاب می کنیم

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

۲. سرعت نقطه A (دری نقطه A_2)

$$V_{A/M} = AM \cdot \omega_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi 600}{60} = 10.46 \text{ ft/sec } \perp AM$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$$

۳. سرعت نقطه A_3 (نقطه A، دری نقطه A_3)

چون $\vec{V}_{A_3} \perp QA$ و $\vec{V}_{A_3/A_2} \parallel AQ$ می باشد از اصل بردارهای مثلث ترسیم است.

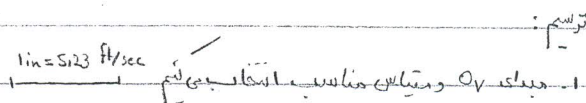
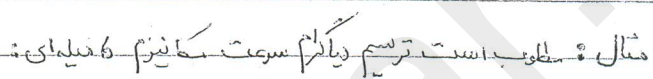
$$V_{A_3/A_2} = ?$$

۴. مقیاس:

$$V_{A_3} = 16 \times 5.23$$

۵. سرعت دورانی میل ۳:

$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{QA} = \frac{16 \times 5.23 \times 12}{3} = 12.55 \text{ rad/sec}$$



$$\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_M$$

3. سرعت نقطه B: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_B \perp \vec{V}_A$ و $\vec{V}_B \perp \vec{V}_B$ می باشد لذا همیشه برای قابل ترسیم است

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$

4. سرعت نقطه C

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

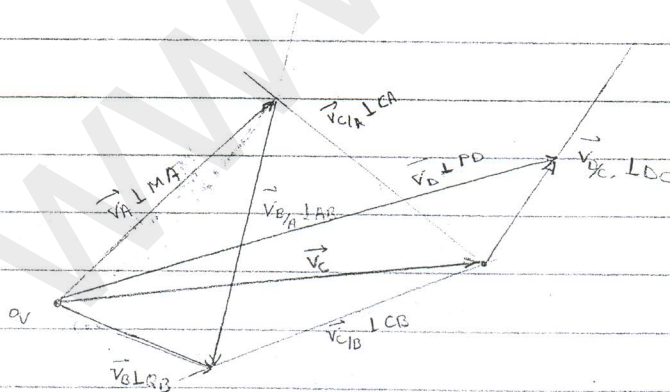
چون $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ معلوم می باشند لذا از این دو معادله می توان $\vec{V}_C$ بدست آورد

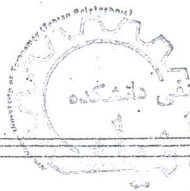
$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$$

5. سرعت نقطه D

چون $\vec{V}_D \perp AD$ و $\vec{V}_{D/C} \perp DC$ لذا می توان از این دو معادله $\vec{V}_D$ را بدست آورد

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{5.23 \times 19.9}{1.9 \times 12} = 62.8 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \\ \omega_4 &= \frac{V_B}{OB} = \frac{5.23 \times 2.6 \times 12}{1.75} = 93.6 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \\ \omega_5 &= \frac{V_{D/C}}{DC} = \frac{5.23 \times 1.6 \times 12}{2.11} = 17.9 \text{ rad/sec} \quad \text{مضاد} \\ \omega_6 &= \frac{V_D}{PD} = \frac{5.23 \times 3.3 \times 12}{2} = 103.55 \text{ rad/sec} \quad \text{ساعت} \end{aligned}$$





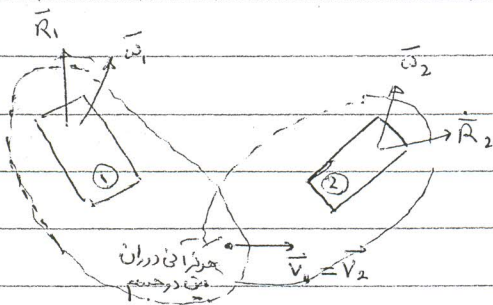
شورای عالی تحقیقات و فناوری

objective 7:

تعیین حرکتی دوران:

حرکتی دوران بین دو جسم عبارت است از نقطه ای در روی دو جسم ریا در امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و

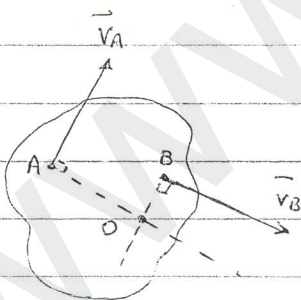
velocity آن بین دو جسم در آن نقطه یکسان باشد.



حالات خاصی که حرکتی دوران یک جسم و زمین:

چون velocity زمین صفر فرض می شود حرکتی دوران جسم و زمین عبارت است از نقطه ای در روی جسم

ریا در امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفر می باشد



0 حرکتی دوران بین جسم و زمین

اگر جسمی تنها انتقال داشته باشد حرکتی دوران آن در

بی نهایت قرار دارد.

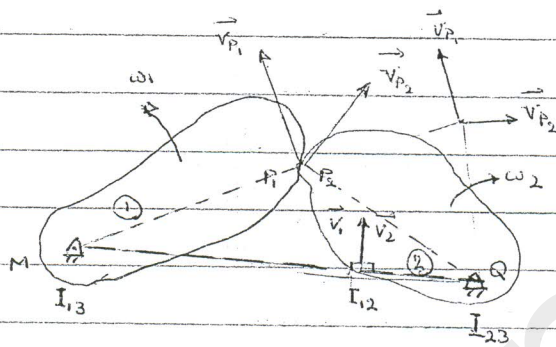
تعداد کل مرکزاتی دوران بین دو جسم برابر است با:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

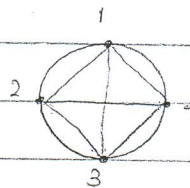
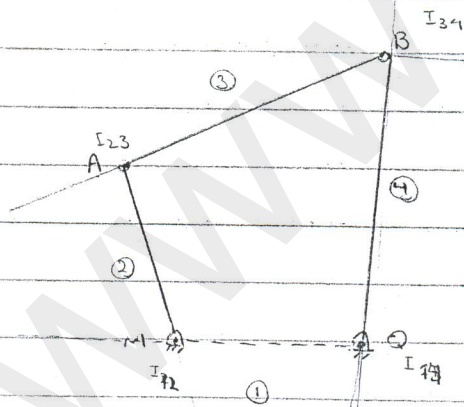
Kennedy's Theorem

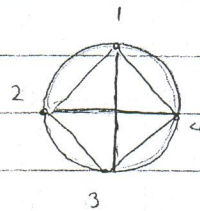
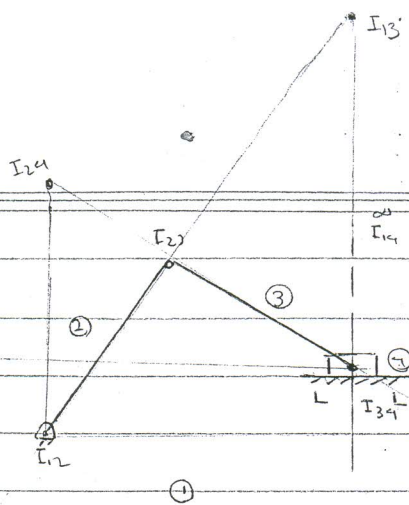
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجبوراً دارای محور حرکتی دارند که در یک خط مستقیم قرار دارند.

اثبات:



$$I_{13} I_{12} \times \omega_1 = I_{12} I_{23} \times \omega_2$$





Unit III : Acceleration Analysis of Linkages :

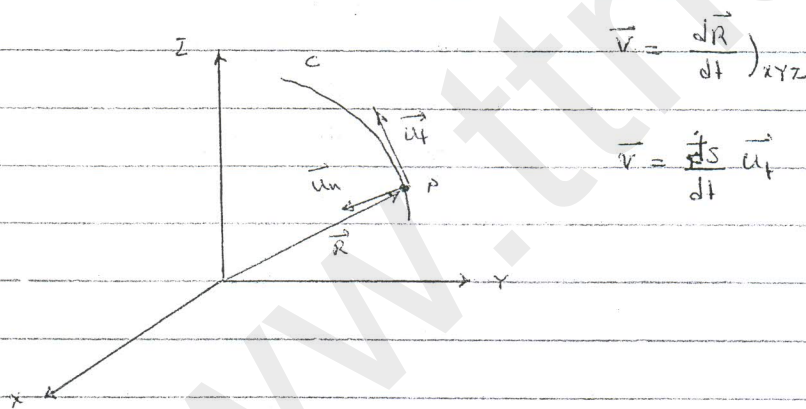
objective 1 :

تعریف شتاب در گره های مختلف : مختلف

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_{xyz} \quad \text{: Velocity - تعریف}$$

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \Big|_{xyz} \quad \text{: Acceleration - تعریف}$$

Part I : شتاب در گره های مختلف بر حسب مختصات مسیر



$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_{xyz}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$$

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

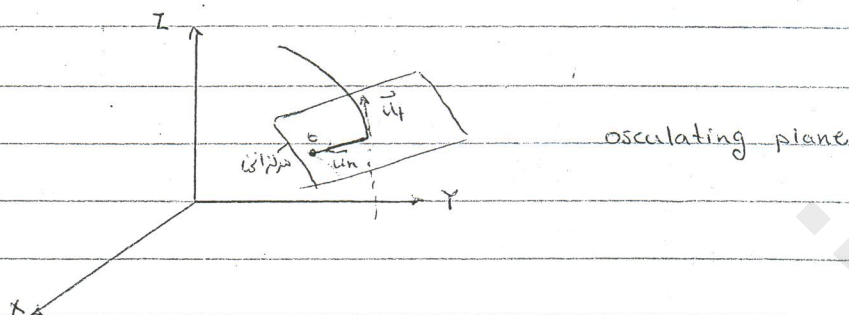
$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{\rho}$$

از رابطه بالا داریم :

$$\vec{A} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\vec{u}_n}{\rho} \quad \text{: نتیجه}$$

در شتاب انتخاب $\vec{u}_n$ بردار عمود بر مماس است و در $\vec{u}_t$ مماس به osculating plane



Part II: شتاب بردار در مختصات استوانه‌ای

$$\vec{A} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{A} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{r} \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z)$$

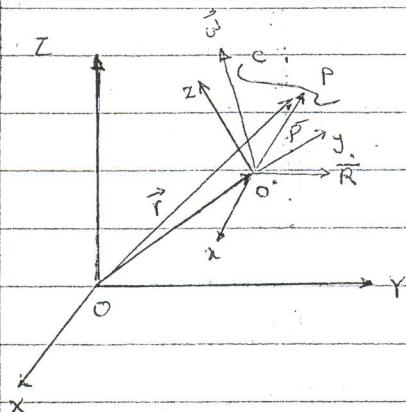
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\vec{A} = (\ddot{r} - \dot{r} \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + \ddot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Parts III, IV, V: شتاب ذره در دو مختصات

فرض کنید ذره‌ای متحرک P در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz

متحرک دارای حرکت کلی $\vec{R}$ و نسبت به محور مختصات ایستایی XYZ می‌باشد.



می‌خواهیم سرعت و شتاب دایره‌ای ذره‌ی P را در دو مختصات

مطلق XYZ تعیین کنیم.

$\vec{R}$ بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ

$\vec{r}$ بردار موقعیت ذره‌ی P در XYZ

همواره رابطی برداری برقرار است:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{p}$$

همواره مشتق رابطی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی XYZ برقرار است:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{XYZ} \quad (a)$$

چون P در مختصات متحرک xyz حرکت می‌کند، تغییر شده‌ی مشتق آن در مختصات اینرسی XYZ نسبت به زمان

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (b)$$

در معادله (a) قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{v}_{XYZ} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{p} \quad \text{و یا داریم:}$$

برای کاسه شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big|_{xyz} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{xyz} \times \vec{P} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{xyz} \quad (c)$$

چون $\vec{V}_{xyz}$ و $\vec{P}$ در مختصات متحرک xyz تعریف می شوند ولی مشتق آن ها نسبت به زمان در مختصات ثابت.

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{xyz} = \frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

در رابطه (c) ترمی دوم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} &= \frac{d\vec{R}}{dt}\Big|_{xyz} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{xyz} \times \vec{P} \\ &+ \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{xyz} \right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{P}) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\vec{A}_{xyz} = \ddot{\vec{R}} + \vec{A}\Big|_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{P})$$

در معادلات فوق:

$\vec{V}_{xyz}$: سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec{A}_{xyz}$: شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

$\ddot{\vec{R}}$: سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

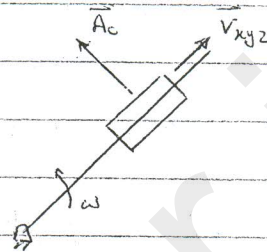
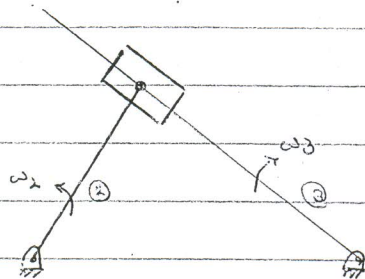
$\vec{R}$: شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\vec{V}_{xyz}$: سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

$\vec{a}_{xyz}$: شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz

Coriolis acceleration: $2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$

وزن باری بر جرمی ایندکس هم داری در این باشد و همزمان سرعت خطی هم داشته باشد



خوب شتاب در این از قانون دست راست بدست می آید

objective 2

کاربرد اعداد مختلط

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = e^{j\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = je^{j\theta}$$

حال برای بدست آوردن شتاب در رابطه از رابطه بالا مشتق می گیریم:

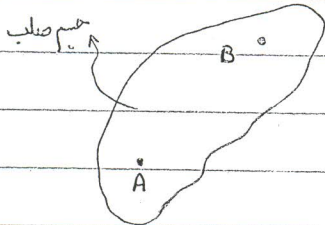
مشتق دوم اعداد مختلط

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - re^{j\theta}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

objective 3

ثبت شدن نقطه از یک جسم صلب



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

اثبات شد:

از رابطه سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\left(\frac{d\vec{V}_B}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}}$$

نتیجه:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$$

$$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}_{\vec{A}_{B/A}^t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}^r}$$

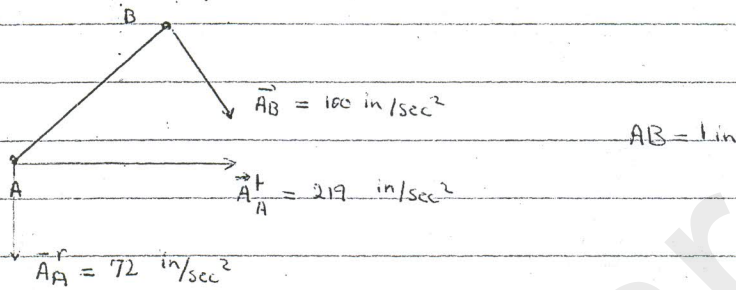
نکته:

$$\vec{A}_{B/A}^t = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \perp AB$$

$$\vec{A}_{B/A}^r = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \parallel AB$$

مقدار $A_{B/A}^r$ مشخص است اما جهت و رسم دیگر از رسم سرعت

مثال 3: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده اند. دیاگرام شتاب را رسم کنید.



$$1 \text{ in} = 50 \text{ m/sec}^2$$

ترسیم 1: شتاب OA و مقیاس مناسب را رسم می کنیم.

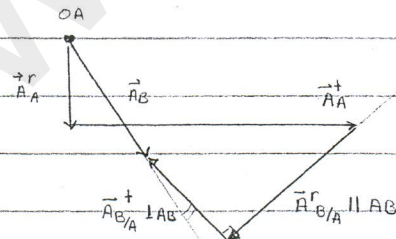
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

2. شتاب نقطه B:

بر حسب مؤلفه ها

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^t + (\vec{a}_{B/A}^r) + (\vec{a}_{B/A}^t)$$

چون $\vec{a}_{B/A}^r$ موازی AB و $\vec{a}_{B/A}^t$ عمود بر AB می باشند لذا چندضلعی برداری قابل ترسیم است:



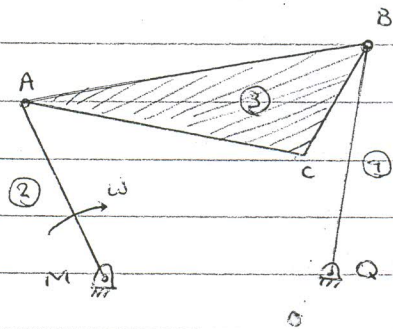
$$\alpha_{AB} = \frac{a_{B/A}^t}{AB} = \frac{96}{1} = 96 \text{ rad/sec}^2 \quad (\text{مثبتی})$$

3. شتاب دورانی بدنه AB

objective 5

روش تریسم دیاگرام شتاب شتابها

مثال: مکانیزم چهارمیلای زیر فرض است: مطلوب است تریسم دیاگرام شتاب



$$MA = 4''$$

$$AB = 8''$$

$$QB = 5.5''$$

$$MQ = 5''$$

$$\omega_2 = 99.2 \text{ rad/sec}$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\omega_3 = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 74.2 \text{ rad/s}$$

$$a_n = 1000 \text{ ft/sec}^2$$

1. مبدأ OA و تریسم مناسب انتخاب می شود.

$$\vec{A}_A = \vec{A}_{A/M} + \vec{A}_{M/M} = \vec{A}_{A/M}^r + \vec{A}_{A/M}^t$$

2. شتاب نقطه A:

$$A_{A/M}^r = MA \times \omega_2^2 = \frac{4}{12} \times (99.2)^2 = 2960 \text{ ft/sec}^2 \parallel AM$$

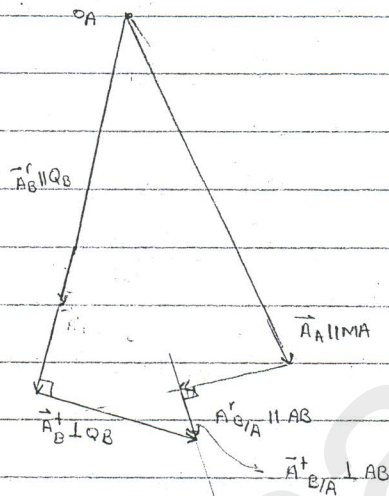
3. شتاب نقطه B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} \Rightarrow \vec{A}_B^r + \vec{A}_B^t = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}^r + \vec{A}_{B/A}^t \quad (a)$$

$$A_B^r = BQ \times \omega_4^2 = \frac{5.5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \text{ ft/sec}^2 \parallel QB$$

$$A_{B/A}^r = AB \times \omega_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \text{ ft/sec}^2 \parallel AB$$

چون $\vec{A}_B^t$ عمود بر QB و چون $\vec{A}_{B/A}^t$ عمود بر AB می باشد لذا جهت کلی بردار تریسم است:

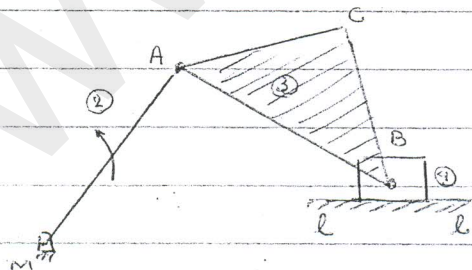


۴: با توجه به مقیاس داریم: جواب $\vec{A}_B^t$ و $\vec{A}_B^t$ را خود به خودی (۴) معلوم می شود. جواب آن می باشد.
به مقیاس معلوم می شود.

۵: شتاب دورانی: ساعت $\alpha_3 = \frac{A_{B/A}^t}{AB} = \frac{120}{8/12} = 180 \text{ rad/sec}^2$

ساعت $\alpha_1 = \frac{A_{B/Q}^t}{QB} = \frac{1150}{5.5/12} = 2510 \text{ rad/sec}^2$

مثال: طبق این رسم دیاگرام شتاب سازم slider-crank:



$MA = 2''$

$AB = 3''$

$AC = 1.5''$

$\omega_2 = 52.8 \text{ rps}$

$\omega_3 = 26.16 \text{ rps}$

$\alpha_2 = 0$

$$1 \text{ in} = 200 \text{ ft/sec}^2$$

1- ابتدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم:

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}_{A/M} + \vec{A}_{A/M}^t \quad \text{2- شتاب نقطه A:}$$

$$A_{A/M}^t = AM \cdot \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times 62.8^2 = 657.6 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}^t + \vec{A}_{B/A}^n \quad \text{a)}$$

چون $\vec{A}_B$ موازی AB است و $\vec{A}_{B/A}^n$ عمود بر AB می‌باشد لذا چنانچه برای قابل ترسیم است:

$$A_{B/A}^t = AB \times \omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (26.16)^2 = 171 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \parallel AB$$

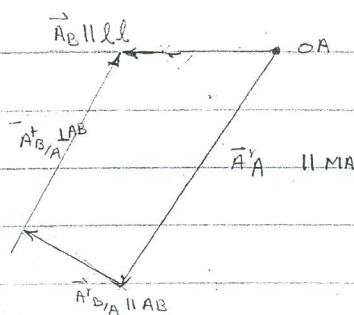
4- از مقیاس:

$$A_B = 397 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2}$$

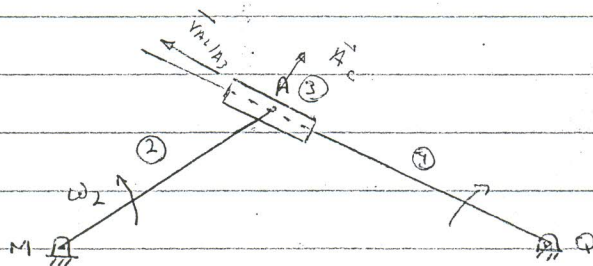
$$A_{B/A}^t = 171 \quad \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2}$$

12- $\vec{A}_{B/A}^t \rightarrow \vec{A}_B$ از مداخلی (a) معلوم می‌شود:

$$\alpha_3 = \frac{A_{B/A}^t}{AB} = \frac{171}{3/12} = 1985 \quad \text{rad/sec}^2 \quad \text{مشتاتی}$$



مثال ۳: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مطابق زیر



$$MA = 2''$$

$$MQ = 4.1''$$

$$\omega_2 = 62.8 \text{ rps}$$

$$V_A = 10.46 \text{ ft/sec}$$

$$V_{A2/A3} = 9.93 \text{ ft/sec}$$

$$QA = 3''$$

$$\alpha_2 = 0$$

ترسیم:

$$I_{in} = 150 \text{ FPS}$$

۱. برای O_A و میانه مناسب انتخاب می کنیم.

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}_M + \vec{A}_M^r$$

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}_M + \vec{A}_M^r$$

۲. شتاب نقطه A :

$$= \frac{2}{12} \times (62.8)^2 = 657 \text{ FPS}^2 \parallel MA$$

۳. شتاب

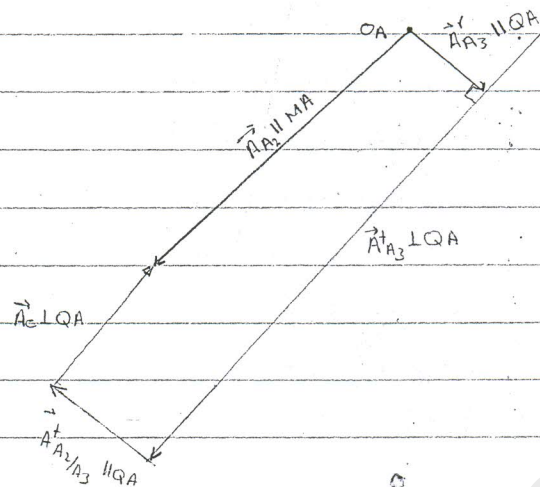
$$\vec{A}_A = \vec{A}_A + \vec{A}_{A2/A3} + \vec{A}_C = \vec{A}_A + \vec{A}_{A2/A3} + \vec{A}_{A2/A3} + \vec{A}_C$$

برای هر عضو در نظر گرفته $\vec{A}_A^t$ و $\vec{A}_A^r$ را بر شتاب نسبی

چون $\vec{A}_A^t$ عمود بر QA و $\vec{A}_A^r$ موازی QA می باشد لذا جهت $\vec{A}_A^t$ و $\vec{A}_A^r$ ترسیم است.

$$A_{A3}^r = QA \omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (12.55)^2 = 39.9 \text{ ft/sec}^2 \parallel QA$$

$$A_C = 2\omega_3 \times V_{A2/A3} = 2 \times 12.55 \times 9.93 = 249 \text{ ft/sec}^2 \perp QA$$



4- ارضتاس

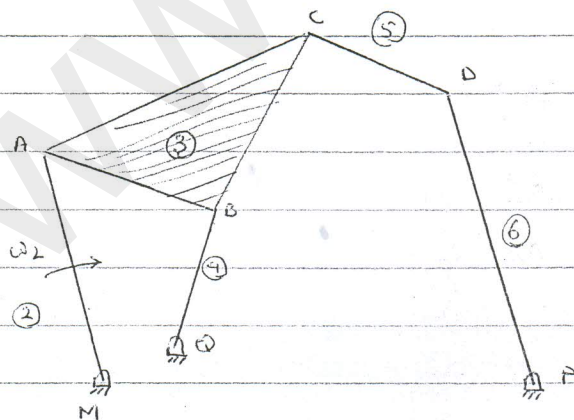
$$A_A^+ = 857 \text{ ft/sec}^2$$

$$A_A^+ A_3 =$$

$$\alpha_3 = \frac{A_A^+}{QA} = \frac{857}{3/12} = 3428 \text{ rad/sec}^2 \quad \text{مطابق}$$

5. شتاب دورانی میل 3:

مثال:



$$\omega_2 = 79.2 \text{ rps}$$

$$V_A = 15.7 \text{ Fps}$$

$$\omega_3 = 62.8 \text{ rps}$$

$$\omega_4 = 93.6 \text{ rps}$$

$$\omega_5 = 17.9 \text{ rps}$$

$$\omega_6 = 103.55$$

$$1\text{ in} = 500 \text{ Ft/sec}^2$$

1- حساب $\vec{A}_A$ ونسب مناسب انتخاب می کنیم

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{N/M} = \vec{A}'_{A/M}$$

2- حساب A

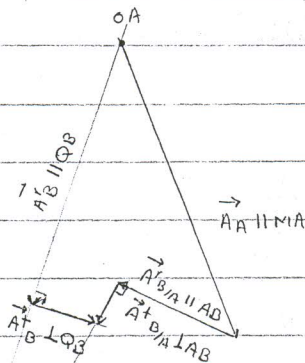
$$A'_{A/M} = M A \times \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times (99.2)^2 = 1479 \text{ Ft/sec}^2 \parallel MA$$

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}'_{B/A} + \vec{A}''_{B/A}$$

3- حساب نقطه B

$$A'_B = QB (\omega_1)^2 = \frac{1.75}{12} \times (93.6)^2 = 1278 \text{ Ft/sec}^2 \parallel QB$$

$$A''_{B/A} = AB \times (\omega_3)^2 = \frac{1.88}{12} \times (62.8)^2 = 618 \text{ Ft/sec}^2 \parallel AB$$

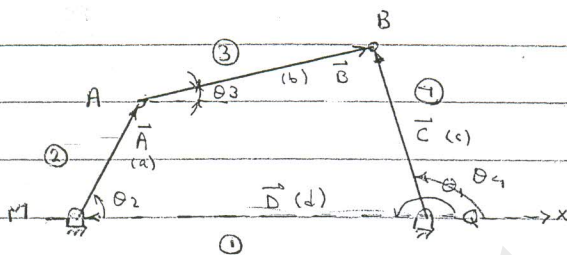


Unit III

Displacement velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods

objective 1

تحلیل مکانیزم چهارمیلادی



همواره در یک حرکت مکانیزم بالا را به یک برداری زیر برقرار است:

$$\vec{D} + \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = 0$$

$$D = d e^{j\theta_1}$$

$$A = a e^{j\theta_2}$$

$$B = b e^{j\theta_3}$$

$$C = c e^{j\theta_4}$$

درستایه با اعداد مختلط

$$d e^{j\theta_1} + a e^{j\theta_2} + b e^{j\theta_3} - c e^{j\theta_4} = 0$$

نذاریم:

با تقابل معادله بالا به سمت حقیقی و موهومی:

$$d \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 + b \cos \theta_3 - c \cos \theta_4 = 0$$

$$d \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 + b \sin \theta_3 - c \sin \theta_4 = 0$$

$$= 180^\circ \text{ between } \theta_1 \text{ and } \theta_3$$

$$\begin{cases} d + a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 - c \cos \theta_4 = 0 \\ a \sin \theta_2 + b \sin \theta_3 - c \sin \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$[-d + a \cos \theta_2 - c \cos \theta_4]^2 = (b \cos \theta_3)^2$$

$$\left[\frac{a^2 \sin^2 \theta_2}{a^2} + \frac{c^2 \sin^2 \theta_4}{c^2} \right] = (-b \cos \theta_3)^2$$

$$d^2 + a^2 \cancel{\cos^2 \theta_2} + c^2 \cancel{\cos^2 \theta_4} - 2da \cos \theta_2 + 2dc \cos \theta_4 - 2ac \cos \theta_2 \cos \theta_4 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$a^2 \cancel{\sin^2 \theta_2} + c^2 \cancel{\sin^2 \theta_4} - 2ac \sin \theta_2 \sin \theta_4 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 = 2ad \cos \theta_2 + 2dc \cos \theta_4 - 2ac [\cos \theta_2 \cos \theta_4 +$$

$$\sin \theta_2 \sin \theta_4] = 0$$

$$K_1 \cos \theta_4 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos (\theta_2 - \theta_4)$$

$$K_1 = d/a$$

$$K_2 = d/c$$

$$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\sin \theta_4 = \frac{2 \tan \theta_4/2}{1 + \tan^2 \theta_4/2}$$

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2 \theta_4/2}{1 + \tan^2 \theta_4/2} ; \tan \theta_4/2 = \dots$$

35

$$A \tan^2 \frac{\theta_4}{2} + B \tan \frac{\theta_4}{2} + C = 0$$

$$A = \cos \theta_2 + k_3 - k_2 - k_2 \cos \theta_3$$

$$B = -2 \sin \theta_2$$

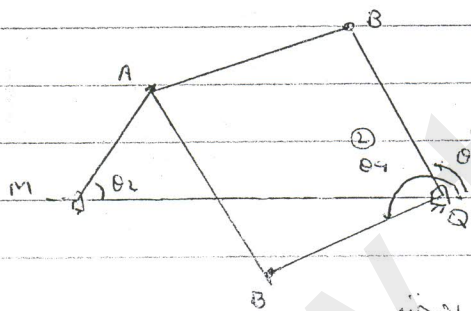
$$C = k_1 + k_3 - (1 + k_2) \cos \theta_2$$

$$k_1 = \frac{d}{a}$$

$$k_2 = \frac{d}{c}$$

$$k_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\tan \frac{\theta_4}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$



working space : $B^2 - 4ac > 0$

برای این دو شکل حالت برای شروع حرکت داریم

به همین دلیل $\pm$ داریم

working space برای θ_2 است

هر دو MA Link و BQ می تواند 360 بچرخد

در صورتی که طول این دو ضلع با هم و AB و MQ با هم برابر باشند

محاسبه ی رابطه ی سرعت

از معادله ی تعادل نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

مشتق رابطه ی بالا نسبت به زمان:

$$37 \quad a j \omega_2 e^{j\theta_2} + b j \omega_3 e^{j\theta_3} - c j \omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

بأنسب ذرف:

$$\begin{cases} a\omega_2 \sin \theta_2 - b\omega_3 \sin \theta_3 + c\omega_4 \sin \theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos \theta_2 + b\omega_3 \cos \theta_3 - c\omega_4 \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

درستاده و در کپول و ω_2 و ω_4 :

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

کامپیوتری رابطه شتاب:

از رابطه سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} a\dot{\omega}_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + b\dot{\omega}_3 e^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - c\dot{\omega}_4 e^{j\theta_4} \\ + c\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0 \end{aligned}$$

بأنسب ذرف:

$$\begin{aligned} -a\dot{\omega}_2 \sin \theta_2 - a\omega_2^2 \cos \theta_2 - b\dot{\omega}_3 \sin \theta_3 - b\omega_3^2 \cos \theta_3 + c\dot{\omega}_4 \sin \theta_4 \\ + c\omega_4^2 \cos \theta_4 = 0 \end{aligned}$$

$$a\dot{\omega}_2 \cos \theta_2 - a\omega_2^2 \sin \theta_2 + b\dot{\omega}_3 \cos \theta_3 - b\omega_3^2 \sin \theta_3 - c\dot{\omega}_4 \cos \theta_4 = 0$$

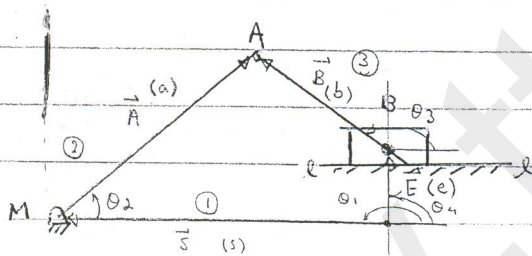
$$+ C\omega_1^2 \sin\theta_1 = 0$$

حال برای معادله داریم:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آرایش تغییر مکان مکانیزم slider crank:



محاسب ابعاد مکانیزم:

$$\vec{J}_1 + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow J_1 e + a e - b e - e e = 0$$

$$s \cos\theta_1 + a \cos\theta_2 - b \cos\theta_3 - e \cos\theta_4 = 0$$

با توجه داریم:

$$s \sin\theta_1 + a \sin\theta_2 - b \sin\theta_3 - e \sin\theta_4 = 0$$

$$\theta_1 = 0, \theta_4 = 90$$

$$\begin{cases} -s + a \cos\theta_2 - b \cos\theta_3 = 0 \\ a \sin\theta_2 - b \sin\theta_3 - e = 0 \end{cases}$$

$$(-s + a \cos \theta_2)^2 = (b \cos \theta_3)^2 \Rightarrow s^2 + a^2 \cos^2 \theta_2 - 2sb \cos \theta_2 = b^2 \cos^2 \theta_3$$

$$(-e + a \sin \theta_2)^2 = (b \sin \theta_3)^2 \Rightarrow e^2 + a^2 \sin^2 \theta_2 - 2ea \sin \theta_2 = b^2 \sin^2 \theta_3$$

$$Ls^2 + Ms + N = 0$$

$$L = 1$$

$$M = -2a \cos \theta_2$$

$$N = a^2 + e^2 - b^2 - 2ae \sin \theta_2$$

$$s = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$$\sin \theta_3 = \frac{1}{b} [a \sin \theta_2 - e] \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1} \frac{1}{b} [a \sin \theta_2 - e]$$

محاسبه سرعت

$$s \dot{\theta}_1 + a \omega_2 \dot{\theta}_2 - b \omega_3 \dot{\theta}_3 = 0$$

$$s \dot{\theta}_1 - a \omega_2 \sin \theta_2 + b \omega_3 \sin \theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = 180$$

$$s \dot{\theta}_1 + a \omega_2 \cos \theta_2 - b \omega_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -s - a \omega_2 \sin \theta_2 + b \omega_3 \sin \theta_3 = 0 \\ a \omega_2 \cos \theta_2 - b \omega_3 \cos \theta_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$a \omega_2 \cos \theta_2 - b \omega_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = a\omega_2 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3}$$

کاسپی نسبت

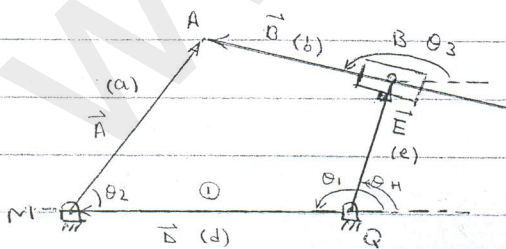
$$\ddot{S} e^{j\theta_1} + a j \ddot{\theta}_2 e^{j\theta_2} - a \omega_2^2 e^{j\theta_2} - b j \ddot{\theta}_3 e^{j\theta_3} + b \omega_3^2 e^{j\theta_3} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{S} \cos\theta_1 - a \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - a \omega_2^2 \cos\theta_2 + b \ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + b \omega_3^2 \cos\theta_3 = 0 \\ \ddot{S} \sin\theta_1 + a \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 + a \omega_2^2 \sin\theta_2 - b \ddot{\theta}_3 \cos\theta_3 + b \omega_3^2 \sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha}_3 = \frac{a \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - a \omega_2^2 \sin\theta_2 + b \omega_3^2 \sin\theta_3}{b \cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = [-a \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - a \omega_2^2 \cos\theta_2 + b \ddot{\theta}_3 \sin\theta_3 + b \omega_3^2 \cos\theta_3]$$

آنا لیز تحریکات مکانیک : Inverted slider crank



$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$

بر حسب این روابط :

$$d e^{j\theta_1} + a e^{j\theta_2} - b e^{j\theta_3} - e e^{j\theta_4} = 0 \quad \theta_1 = 180^\circ$$

$$-d \quad \theta_3 + 90 + 180 - \theta_4 = 360$$

$$d \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 - e \cos \theta_4 = 0 \quad \theta_3 - \theta_4 = 90^\circ$$

$$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow \omega_3 = \omega_4$$

$$d \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 - e \sin \theta_4 = 0 \quad \alpha_3 = \alpha_4$$

$$-d + a \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 - e \cos \theta_4 = 0$$

$$a \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 - e \sin \theta_4 = 0$$

$$\begin{cases} -d + a \cos \theta_2 - e \cos \theta_4 + b \sin \theta_4 = 0 \\ a \sin \theta_2 - e \sin \theta_4 - b \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a \sin \theta_2 - e \sin \theta_4}{\cos \theta_4}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2} \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2}$$

$$K_1 \tan \frac{\theta_1}{2} + K_2 \tan \frac{\theta_4}{2} + K_3 = 0$$

$$\tan \theta_4/2 = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4 K_1 K_3}}{2 K_1}$$

$$K_1 = d - e - a \cos \theta_2$$

$$K_2 = 2 a \sin \theta_2$$

$$K_3 = a \cos \theta_2 - d - e$$

رابطه سرعت:

$$a j \omega_2 e^{j \theta_2} - b e^{j \theta_3} - b j \omega_3 e^{j \theta_3} - e j \omega_4 e^{j \theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -a \omega_2 \sin \theta_2 - b \cos \theta_3 + b \omega_3 \sin \theta_3 + e \omega_4 \sin \theta_4 = 0 \\ a \omega_2 \cos \theta_2 - b \sin \theta_3 - b \omega_3 \cos \theta_3 - e \omega_4 \cos \theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_3 = \omega_4$$

$$\theta_3 = 90^\circ + \theta_4$$

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{a \omega_2}{b} \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$b + \frac{a \omega_2}{b} [b \cos(\theta_4 - \theta_2) - e \sin(\theta_4 - \theta_2)]$$

رابطه شتاب:

$$a j \alpha_2 e^{j \theta_2} - a \omega_2^2 e^{j \theta_2} - b e^{j \theta_3} - b j \omega_3 e^{j \theta_3} + b j \omega_3 e^{j \theta_3} - b j \alpha_3 e^{j \theta_3}$$

$$+ b \omega_3^2 e^{j \theta_3} - e j \alpha_4 e^{j \theta_4} + e \omega_4^2 e^{j \theta_4} = 0 \quad \theta_3 = 90^\circ + \theta_4$$

$$-a \alpha_2 \sin \theta_2 - a \omega_2^2 \cos \theta_2 - b \cos \theta_3 + 2 b \omega_3 \sin \theta_3 + b \alpha_3 \sin \theta_3 + b \omega_3^2 \cos \theta_3$$

$$+ b \alpha_4 \sin \theta_4 + e \omega_4^2 \cos \theta_4 = 0$$

$$a \alpha_2 \cos \theta_2 - a \omega_2^2 \sin \theta_2 - b \sin \theta_3 + 2 b \omega_3 \cos \theta_3 - b \alpha_3 \cos \theta_3 + b \omega_3^2 \sin \theta_3$$

$$- e \alpha_4 \cos \theta_4 + e \omega_4^2 \sin \theta_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

$$\tilde{b} = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

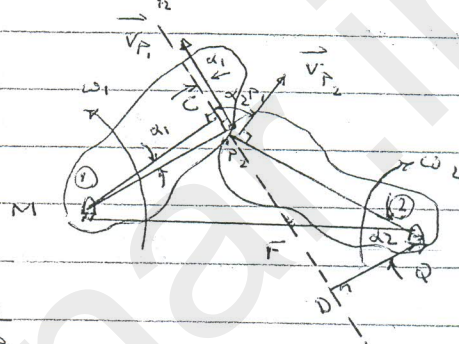
Unit V

Fundamental of Uniform Rotary Transmission

باید ترتیب نسبت سرعت بین دو جسم:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} =$$

از روی شکل داریم:



$$V_{P1} = MP_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{V_{P1}}{MP_1}$$

$$V_{P2} = QP_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_{P2}}{QP_2}$$

لذا داریم:

$$\text{Speed ratio: } SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P2} \cdot MP_1}{V_{P1} \cdot QP_2}$$

می خواهیم که حرکت مایه صورت uniform منتقل شود:

باید در جهت انتقال سرعت های مماسی باشد در جهت + می تواند یکی نباشد در این صورت لغزش داریم.

برای تماس در جسم در عین انتقال سرعت در این شرط تماس:

$$V_{P1}^n = V_{P2}^n$$

خطوط QD و MC را بر روی انتقال مشترک nn عمودی کنیم.

$$V_{P_1}^n = V_{P_1} \cos \alpha_1 = V_{P_2}^n = V_{P_2} \cos \alpha_2 \quad \text{شرط تناسب}$$

$$Q_{P_2} = \frac{QD}{\cos \alpha_2} \quad \text{از روی شکل:}$$

$$MP_1 = \frac{MC}{\cos \alpha_1}$$

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2} MP_1}{V_{P_1} Q_{P_2}} = \frac{V_{P_2} \cos \alpha_2 MC}{V_{P_1} \cos \alpha_1 \cdot QD} \quad \text{از:}$$

پارامتر نیرو تناسب:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD}$$

دو مثلث QDF و MCF بنابر دو زاویه منتهی در یک خط:

$$\boxed{SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}}$$

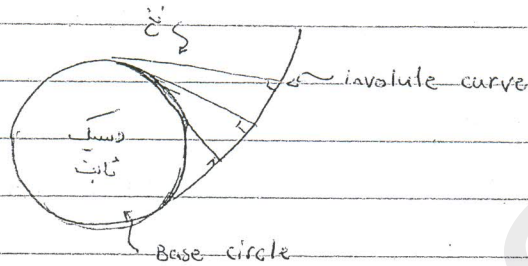
اگر تقاطع F کوچکترین ارتفاعی در آن باشد SR دارای ارتفاعی است و در مطلق ثابت باشد SR.

صورت uniform انتقال می یابد

x ثابت در کم و در نوبت مشترک خط افقی را در یک نقطه قطع کند این نقطه باید مطلق ثابت باشد.

منحنی انولوت: (involute curve)

معبارت است از مکان هندسی انتهای یک نخ به از روی یک دسک ثابت بازی شود.



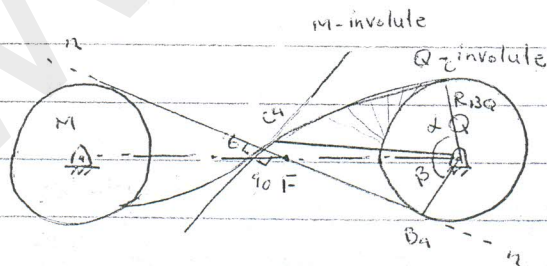
منحنی انولوت دارای خواص زیر است:

۱. در هر نقطه از منحنی شعاع انحناء طول نخ باشد است.

۲. مرکز انحناء هر نقطه از منحنی کل تقاطع نخ باشد با دسک است.

۳. همواره امتداد نخ باشد در نقطه برخورد عمود بر رینل منحنی involute است.

اثبات ثابت بودن شعای F :



نمودی جانی می توان از آن در مورد بر محاسن مشترک در منحنی رسم کرد شعای F روی خط مشترک دو دسک

است

اثبات میثقی involute :

نقطه‌ی شکی، طول قوس دایره و ارتفاعی C تا B_1 :

$$\widehat{CB_1} = R_{BQ} (\alpha + \beta)$$

با توجه به خاصیت میثقی انولوت :

$$\widehat{CB_1} = C_1 B_1$$

نقطه‌ی شکی :

$$\tan \beta = \frac{C_1 B_1}{R_{BQ}} = \frac{R_{BQ} (\alpha + \beta)}{R_{BQ}} \Rightarrow$$

$$\tan \beta = \alpha + \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan \beta - \beta = \text{Inv}(\beta)}$$

Unit VI

Gear Tooth Technology :

objective 1 :

1. Base circle : (دایره چپند)

عبارت است از دایره‌ی خارجی روی چرخ دنده که منحنی involute

دندانه‌ها از روی آن ساخته شده است

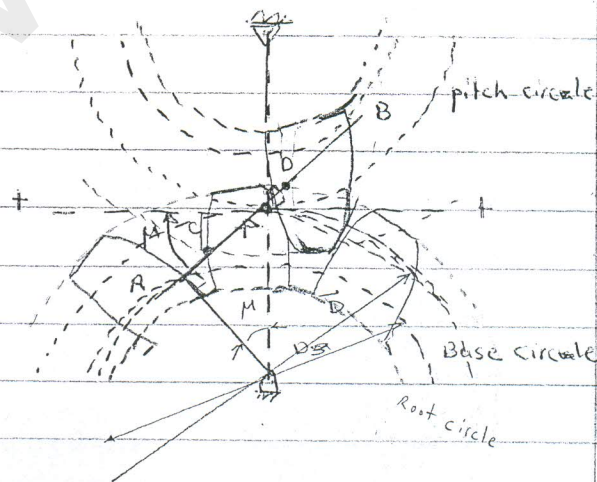
2. Pitch circle

عبارت است از دایره‌ی متداول یا دایره‌ی

به طوری که در چرخ دنده‌ی دیگر دایره‌ی تماس

بایکدیگر تماس باشد این دایره روی چرخ دنده

خارجی می باشد



3. Root circle

عبارت است از دایره‌ی مرئی روی چرخ دنده که از لبه‌های ریشه‌ها می گذرد

4. Addendum circle

عبارت است از دایره‌ی حقیقی روی چرخه‌ی دندانه‌ای از ابتدای ریشه‌ی حلقه‌ی دندانه‌ای

5. Pitch point

عبارت است از نقطه‌ی تماس دو دایره‌ی Pitch circle

6. Addendum (سرزنه‌چیا)

عبارت است از سرزنه‌ی دندانه‌ی دایره‌ی Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Dedendum

عبارت است از ته‌ی دندانه‌ی دایره‌ی Pitch و root از دندانه

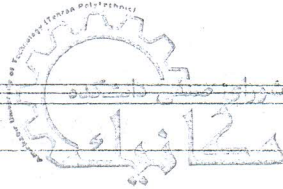
8. clearance

عبارت است فاصله‌ی شعاعی بین دایره‌ی Addendum یک چرخه‌ی دندانه‌ی دایره‌ی root چرخه‌ی دیگر

9. working depth

عبارت است از عمق عمل فاصله‌ی شعاعی بین دایره‌ی Addendum دو چرخه‌ی دندانه‌ی دیگر برابر است

clearance = Addendum + Dedendum



10. Tooth Face

عبارت است قسمتی از سطح دندانه دارای منحنی $involute$ می باشد. این سمت کمر

است بین دایره $Base$ و $Addendum$

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره $pitch$ از یک سطح دندانه تا نقطه مقابل

دندانه یا طول قوس بین دو $pitch$ point دندانه

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی $involute$ نمی باشد. این سمت

کمر بین دایره $Base$ و $root$ یک چرخنده است

13. line of action

۱. تماس مشترک دایره $Base$ است

۲. هر نقطه از دندانه می تواند تماس بین دو چرخنده را درگیر روی این خط قرار دهد

۳. در نقطه تماس بین دو دندانه عمود بر $profile$ منحنی های $involute$ است

۴. امتداد دایره اتصالی بین دو چرخنده را درگیر روی این خط قرار می گیرد

۵. از $pitch$ point می گذرد

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دایره Pitch. توجه می شود که امتداد نیروی انتقال بین دایره دایره دایره روی خط عمل می باشد.

15. circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره دایره از یک لقمه روی یک دایره تا لقمه بعدی روی دایره دایره دایره

$$P_c = \frac{\pi D}{N} \quad \text{تعداد دایره ها: } N$$

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک لقمه روی یک دایره تا لقمه بعدی روی دایره دایره دایره

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N} \quad \text{Base دایره: } D_B$$

$$R_B = R_P \cos \phi$$

از روی شکل دایره

$$P_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D_P \cos \phi}{N} \Rightarrow P_B = P_c \cos \phi$$

17. Diametral pitch

بنابراین تعریف عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده ها از آن استفاده می شود و برابر

$$P_D = \frac{Z}{D}$$

است یا:

$$P_D = \frac{1}{m_o}$$

که در عبارت است از استاندارد دینچه در استاندارد اروپایی و امریکایی

قانون هم: در دینچه دگر باید دای Diametral pitch مساوی باشد

اگر دینچه دایالیک یک دینچه دگر دایالیک هم باید یک دینچه دگر دایالیک باشد P_c های دینچه دایالیک
بنابراین:

$$P_{c1} = P_{c2} \Rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \Rightarrow \frac{P_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{D1}} = \frac{1}{P_{D2}} \Rightarrow P_{D1} = P_{D2}$$

تایید دگر دینچه

از تعریف circular pitch داریم:

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \Rightarrow P_c P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه حرکتی روی دینچه بین نقطه شروع و نقطه خاتمه دگر دینچه دینچه دگر دینچه

اگر شش درایک دینچه دگر دینچه دایالیک نباشد، زاویه دگر دینچه دینچه دگر دینچه دینچه

است

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه مرکزی circular pitch در صورتی که pitch angle زیاد شود

نیروی بیشتری منتقل می کند.

20. Interference

عبارت است از شرایطی که یک سطح انحراف با یک سطح غیر انحراف بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل

کند.

این شرایط در چعبه دنده های تور کار کرده بصورت زیر اتفاق می افتد:

۱- چعبه دنده های تور: چنانچه در چعبه دنده های تور در عین کارکرد روغن چعبه دنده کم شود، بصورتی که در عین کارکرد

بوجود آید، چعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت چعبه دنده قفل کند و عامل آن تداخل بین چرخ دنده های باشد.

اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استفاده از حفشی محور چرخ دنده ها را حذف نمود چون

مکن است در عین اتصال قدرت زیاد تماس در سمت Flank برقرار شده باشد.

۲- چعبه دنده های کار کرده: این نوع چعبه دنده ها در حالت زمانی که درگیر هیچ یک از مسلمات تور کار کرده اند تداخل

بصورت کم شدن روغن چعبه دنده خود را نشان می دهد.

21. Undercut

نیاز به بنابر ^{نصب} خط چرخ دنده در داخل جبهه دند، تماس در سمت Flank برقرار شدی توان

سطح دندانه پایین دایره Base دایره root تراش داده شود تا تماس از بین برود این عمل را

undercut می گویند. باعث تضعیف استحکام هستی دندانه می گردد

22. Contact Ratio

بنا بر تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیرین در چرخ دندانی درگیر

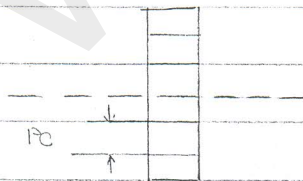
$$GR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{Pitch angle}} = \frac{P}{P_c \cos \mu}$$

نسبت درامتنا

23. path of contact = CDH

عبارت است از بخشی از خط عمل دندان هندی وقتی نقاط تماس بین دو چرخ دندانی درگیر باشد این قسمت

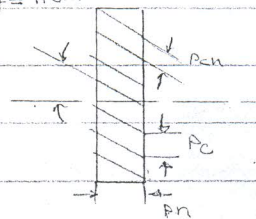
بخشی از خط عمل دایره Addendum در چرخ دندانی درگیر است.



Spure

$$P_c \cdot P_d = \pi$$

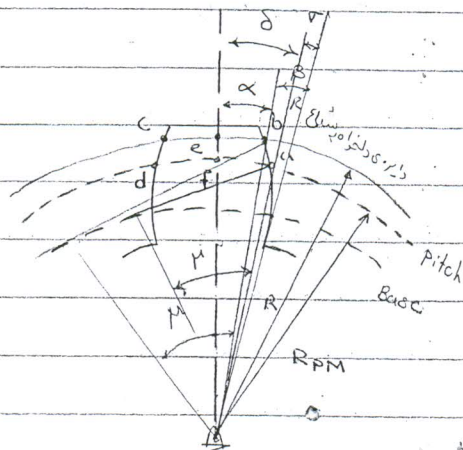
ϕ = Helix angle



Helical gear

$$P_{cN} = P_d N = \pi$$

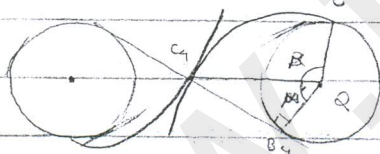
کامپی صفاست دینا در سطح و افواه R :



$$\alpha = \hat{e}mb = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$\delta = \hat{f}ma = \frac{t_{ad}}{2R_{pm}}$$

حال از تعریف یعنی involute استفاده می‌کنیم



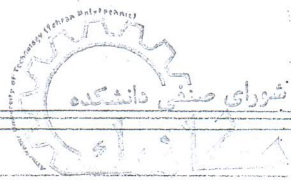
$$\beta = \text{Inv} \mu$$

$$\beta = \text{Inv} \mu' = \tan \mu' - \mu'$$

$$\gamma = \text{Inv} \mu = \tan \mu - \mu$$

حال از روی شکل داریم:

$$\alpha + \beta = \delta + \gamma \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} + \text{Inv} \mu' = \frac{t_{ad}}{2R_{pm}} + \text{Inv} \mu$$



$$t_{bc} = 2R \left(\frac{t_{ad}}{2R_{PM}} + \text{Inv } \mu - \text{Inv } \mu' \right)$$

فاصله دندان در سطح R

Part II

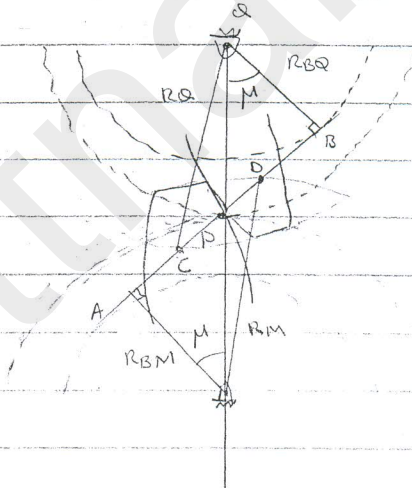
$$CIR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{pitch angle}}$$

نسبت تغییرات نسبت تماس برابر است با:

$$C = \frac{CD}{P_c \cos \mu}$$

$$CD = CP + PD$$

$$CP = BC - BP$$



از روش مثلث قائم

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$

$$BP = R_{PQ} \sin \mu$$

$$PD = AD - AP$$

$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$

$$AP = R_{PM} \sin \mu$$

$$\text{Path of Contact} = CD = (BC - BP) + (AD - AP)$$

$$CD = \sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM}) \sin \mu$$

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM}) \sin \mu}{P_c \cos \mu}$$

Addendum دایره Addendum Pitch دایره Pitch Base دایره Base

با استفاده از استاندارد R_Q و R_M بدست می آید به عنوان مثال برای چرخ دنده 20°

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$
 Full Depth دایره Addendum دایره Pitch دایره Pitch

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

objective 3:

تعیین شیاره تداخل

قبل از ساخت یک چرخ دنده در می توان چک نمود آیا در چرخ دنده به از ساخت تداخل خواهند

داست ریاضی اطلاعات مورد نیاز عبارتند از:

N_1

N_2

μ

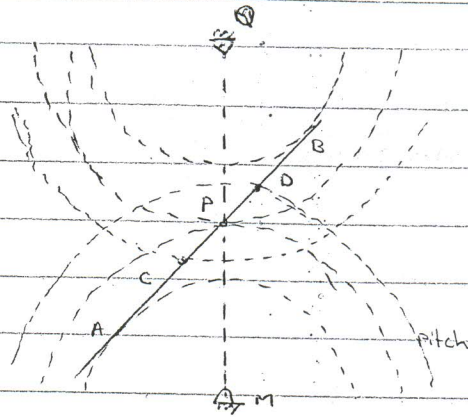
$$P_D = \frac{N}{D}$$

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2}$$
 با داشتن تعداد دندون:

$$2 \times R_{PM} = D_1 = \frac{N_1}{P_D} \quad D_2 = \frac{N_2}{P_D} = R_{PQ} \times 2$$
 و)

$$C = R_{PM} + R_{PQ} = M_Q$$
 فاصله بین دو مرکز

$$R_{BQ} = R_{PQ} \cos \mu \quad R_{BM} = R_{PM} \cos \mu$$
 Base دایره Base



بارسم رویر Base ریسایهای بن هاء خط عمل AB رسم می شود.

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

بارسم شلخ رویر Addendum

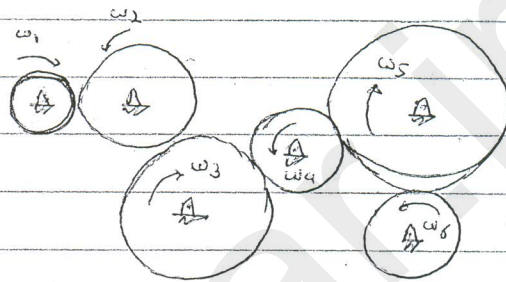
$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

یو قیعت path of contact (CD) بست می آید

اگر چنانچه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار گیرند متداخل خواهیم داشت

Unit VII Design of Gear Train

1. Simple Gear Train



بنابر ترتیب نسبت سرعت در حین دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخ دنده ها یکسان است لذا:

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 = \dots$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6}$$

چون طبق قانون درگیر بین دو چرخ دنده باید Diametrical pitch یکسان باشند :

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \dots = \frac{N_6}{2R_6}$$

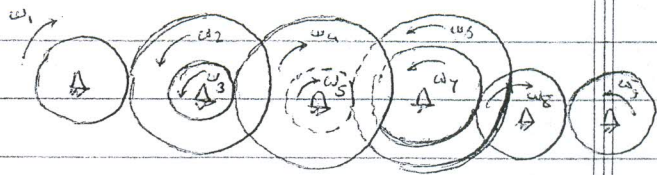
حل داریم :

$$\frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

از آنجا که :

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

2. Compound Gear Train



بنابراین نسبت چرخ دنده برابر است با :

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_8}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_7}{R_4} \cdot \frac{R_5}{R_6} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

لذا حال داریم:

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\text{حاصل ضرب شعاع دایره های چرخ دنده های Driver}}{\text{حاصل ضرب شعاع دایره های چرخ دنده های Driven}}$$

3. Inverted compound Gear Train



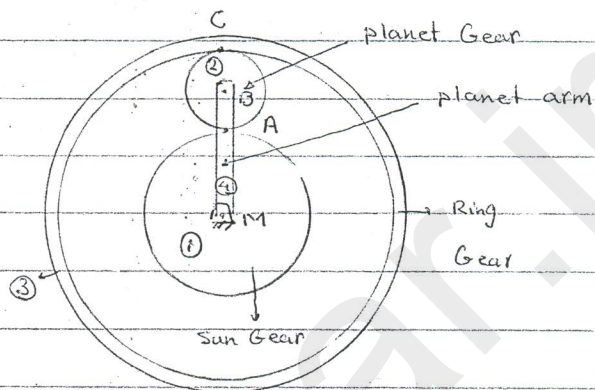
بنابراین تعریف نسبت سرعت ها برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4 \omega_2}{\omega_3 \omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}$$

4. Planetary Gear Train



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \quad \text{از روی شل روی Planet}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B} \quad \text{از روی شل روی Planet}$$

$$\vec{V}_{C/B} = -\vec{V}_{A/B} \quad * \text{ ۱}$$

$$\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B \quad \text{نادریم}$$

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

$$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

$$V_C = R_3 \omega_3 \quad \text{Ring روی قدر شل}$$

$$V_B = (R_1 + R_2) \omega_2 \quad \text{Planet arm روی}$$

$$V_A = R_1 \omega_1 \quad \text{Sun } \omega_1$$

$$R_3 \omega_3 - (R_1 + R_2) \omega_4 = -R_1 \omega_1 + (R_1 + R_2) \omega_4$$

$$\Rightarrow R_1 \omega_1 + R_3 \omega_3 = 2(R_1 + R_2) \omega_4$$

مسئله در نظر بگیرید:

1. Sun Gear is Fixed : $\omega_1 = 0$

input : planet arm

output : Ring

$$SR = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_3}$$

2. Planet arm is Fixed : $\omega_4 = 0$

input : Sun

output : Ring

$$SR = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_3}$$

Reverse gear

3. Ring is Fixed : $\omega_3 = 0$

input : Sun

output : planet arm

$$SR = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}$$

Unit VIII: Cams and Followers

داری سیستم است:

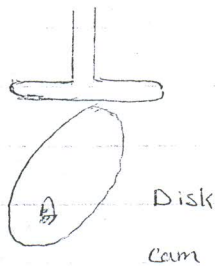
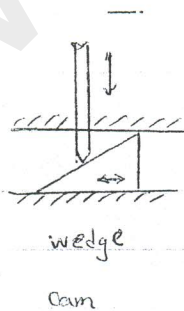
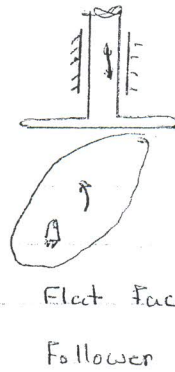
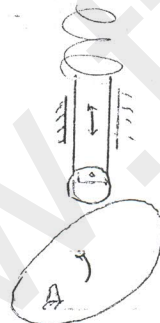
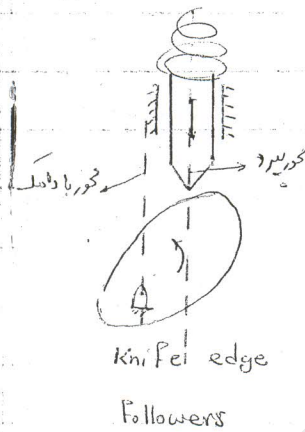
1. Cams

2. Followers

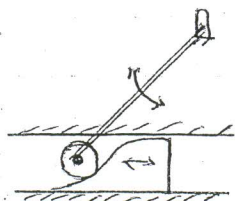
3. Motion programs

انواع پیرو (Followers):

اگر سرعت بالا باشد پیروی Jam اتفاق می افتد و بازگشت از آن سخت است



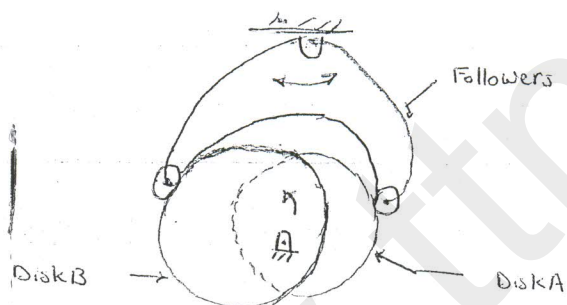
انواع بازگشت:



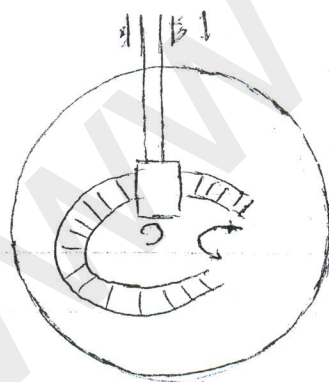
wedge

cam with oscillating followers

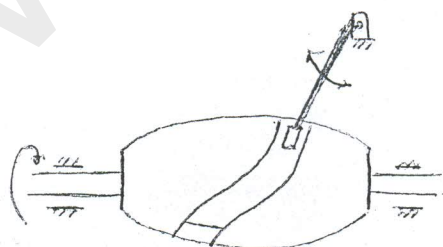
اگر سرعت دورانی بارشک بسیار زیاد باشد از این نوع بارشک استفاده می شود.



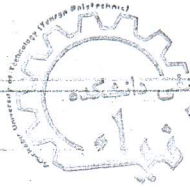
Conjugate
Cam



Spiral cam
with translating
Followers



globoidal
Cam



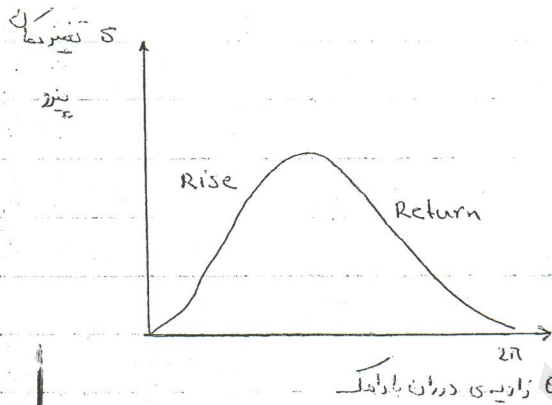
شهراد دانشگاه

شهراد

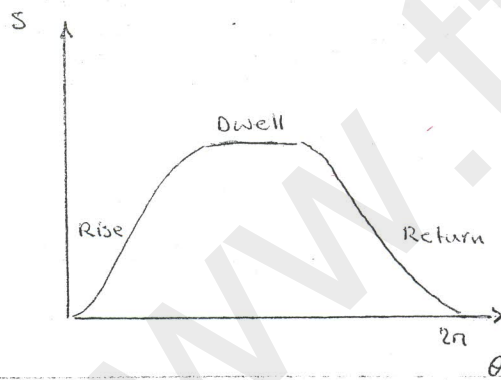
Motion program

انواع

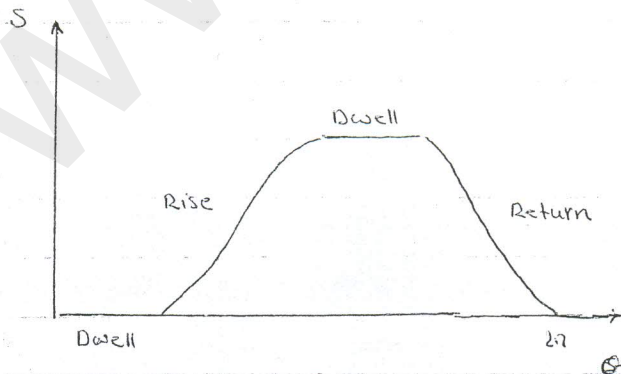
برنامه ای که باید بارش حرکت را پیرو منتقل کند



R-R Motion program



R-D-R Motion program



D-R-D-R Motion program

Objective 3:

نوساخت کانتور بارامک بارامک Motion programme رسم و رسم

فرض کنید سیستم بارامک رسم و رسم است. بارامک Motion م می توان کانتور بارامک رسم و رسم را

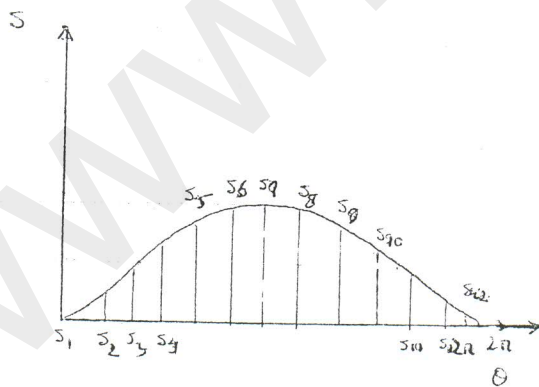
در کارگاه ساخت :

مثال:

فرض کنید بارامک از نوع دیسک رسم و رسم و Translating و Roller Followen و هم مرکز بارامک

بارامک می باشد.

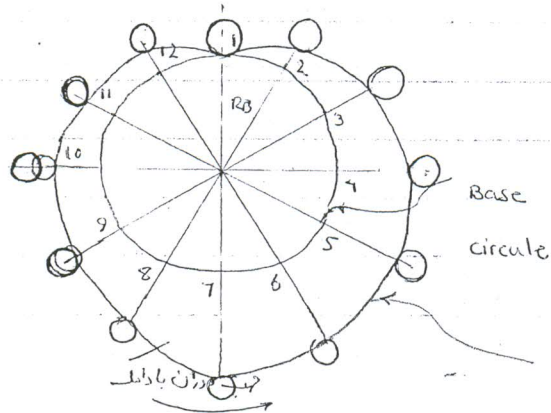
Motion programme مطابق شکل زیر داده شده است.



1. ابتدا دایره Base بارامک را تعیین می کنیم و شعاع آن را R_B می نامیم.

2. Motion programme را به تعداد تقسیمات مساوی تقسیم می کنیم (12 قسمت) و ارتفاع هر قسمت را

S_i می نامیم 10



کانتور بارامک

پیش ۱۲ دایره

۳- رابره ی Base رابره همان تعداد نسیم ی کیم و در خلالت حرکت حرکت بارامک شماره گذاری ی کیم .

۴- یوکتیت Roller بیرر را در ۱۲ نسبت روی رابره ی Base از لیرل ریر مشفص شوده رابره ی بیرر را

$$r_i = R_B + S_i + r_f$$

مشفص ی کیم :

r_f برابر با شغل بیرر یعنی شغل Roller ان است برای این مقصود رابره ی Min شغل انحصار M_p

را حساب شوده و r_f را طوری انتخاب شوده که کوچکتر از Min شغل انحصار M_p باشه

۵- پیش ۱۲ دایره Roller کانتور بارامک است .

Unit IX Motion Programs

آنکه تغییر مکان پیرو، و زاویه در را با نام داریم:

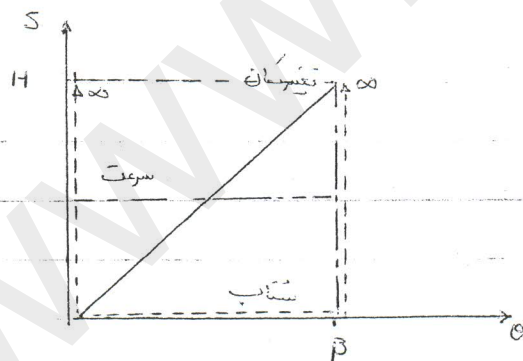
$$v = \frac{ds}{dt} = \text{سرعت پیرو}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{شتاب پیرو}$$

$$j = \frac{da}{dt} = \text{تکان (jerk)}$$

مقره Jerk، min. کنیم آن سیستم Com Post. تری باشد

1- Constant velocity Motion programs



در این رابطه شتاب بی نهایت است.

$$S = c\theta \quad \text{معادله تغییر مکان}$$

$$\theta = \beta$$

$$S = H$$

$$\Rightarrow H = c\beta \Rightarrow c = \frac{H}{\beta} \Rightarrow \left[S = H \frac{\theta}{\beta} \right] \quad \text{تغییر مکان}$$

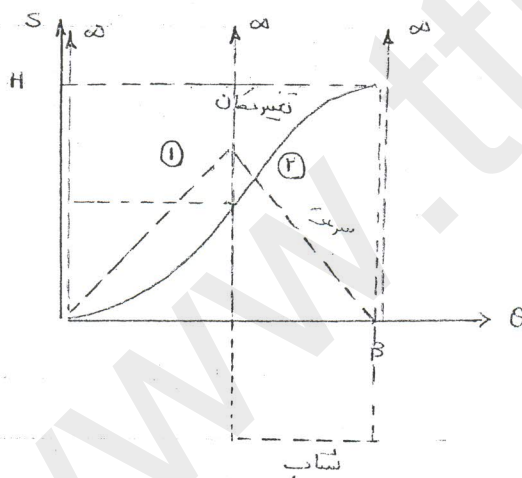


$$v = \frac{ds}{dt} = H \frac{\omega}{\beta} \quad \text{سرعت}$$

$$a = 0$$

این شیخ به علت این که در ابتدای آن Rise سگب یزیت است با توجه به جرم پیردیزی یزیت
به تدریج متوقف شده و غیر قابل قبول است برای سرعت های بالا.

2. Constant acceleration Motion program.



در نقطه حرکت یزیت داریم.

$$S = c\theta^2 \quad 0 \leq \theta \leq \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H/2$$

$$\Rightarrow \frac{H}{2} = c\beta^2 \Rightarrow c = \frac{2H}{2\beta^2} \Rightarrow S = \frac{2H}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2$$

$$V = \frac{4H}{\beta^2} \omega \theta \quad \text{سرعت}$$

$$a = \frac{4H}{\beta^2} \omega^2$$

$$S = C_1 \theta^2 + C_2 \theta + C_3 \quad \beta/2 \leq \theta \leq \beta$$

$$\theta = \beta$$

$$\theta = \beta$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H$$

$$V = 0$$

$$V_2 = V_1$$

$$C_1 = \frac{-2H}{\beta^2}$$

$$C_2 = \frac{4H}{\beta}$$

$$C_3 = -H$$

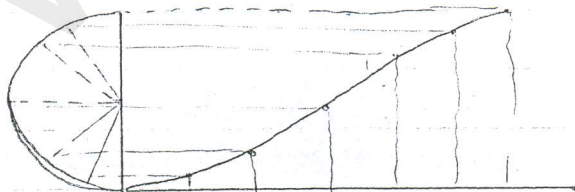
$$S = H \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{4H\omega}{\beta} \left[1 - \frac{\theta}{\beta} \right]$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-4H\omega^2}{\beta^2}$$

این سیستم نیز برای شتاب‌های کم قابل استفاده است.

3. Simple Harmonic Motion program.



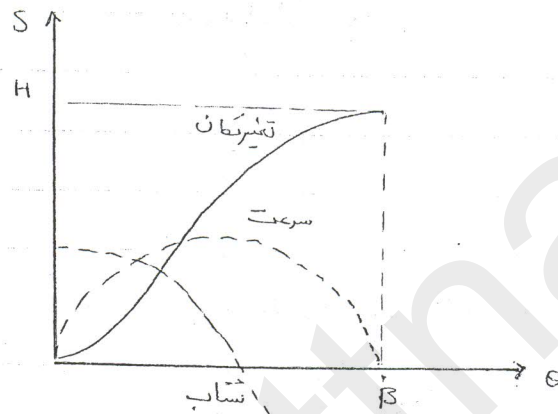
معادله حرکتی هارمونیک ساده

$$S = C(1 - \cos \varphi)$$

$$\varphi = \frac{\pi \theta}{\beta} \quad C = \frac{H}{2}$$

برای حرکت بادامک پیشر

$$S = \frac{H}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right) \quad \text{تغییر مکان}$$



$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta} \sin \frac{\pi\theta}{\beta}$$

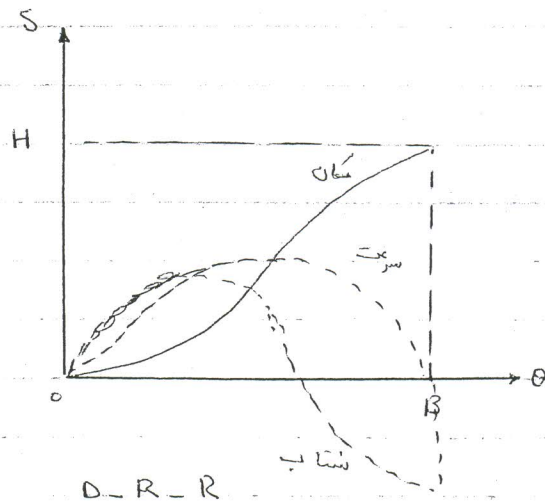
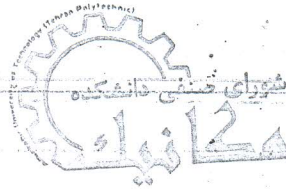
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{H}{2} \left(\frac{\pi\omega}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$$

4. Modified harmonic motion programs.

$$S = \frac{H}{2} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta} \left(\sin \frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$a = \frac{H}{2} \left(\frac{\pi\omega}{\beta} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$



در این جاذبه سرعت نه شتاب ریزه جبهه ای ثابت نیست

5. polynomial Motion programs

شرایط مرزی:

$$\theta = 0 \quad \theta = \beta \quad \theta = \beta$$

$$S = 0 \quad V = 0 \quad a = 0$$

$$\theta = \beta \quad \theta = \beta \quad \theta = \beta$$

$$S = H \quad V = 0 \quad a = 0$$

$$S = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3 + D_4\theta^4 + D_5\theta^5$$

$$V = D_1\omega + 2D_2\omega\theta + 3D_3\omega^2\theta + 4D_4\omega^3\theta + 5D_5\omega^4\theta$$

$$77 \quad a = \underline{D_1} + 2D_2\omega^2 + 6D_3\omega^2\theta + 12D_4\omega^2\theta^2 + 20D_5\omega^2\theta^3$$

Ko

$$\left. \begin{matrix} \theta = 0 \\ S = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow D_0 = 1$$

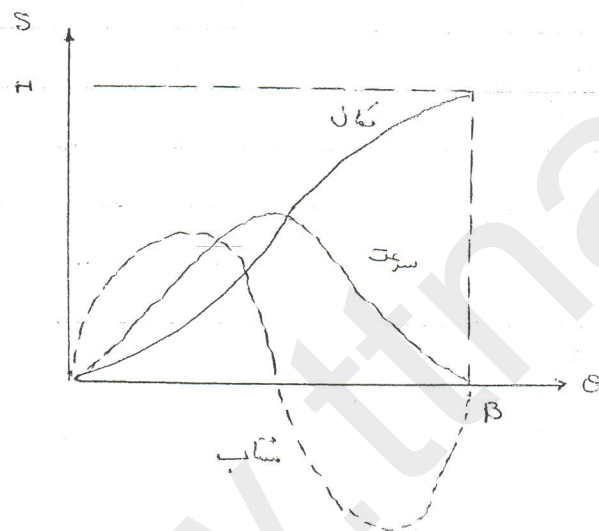
$$\left. \begin{matrix} \theta = 0 \\ V = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \theta = 0 \\ a = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow D_2 = 0$$

$$D_3 = \frac{10H}{\beta^3}$$

$$D_4 = -\frac{15H}{\beta^4}$$

$$D_5 = \frac{6H}{\beta^5}$$



Balancing of Rotating shafts

تعادل استاتیکی و دینامیکی در محورها:

تعادل استاتیکی حول محور ساکن از بانی اتفاق می افتد. نیروهای گریز از مرکز همان حاصل از خود را جثتی شده.

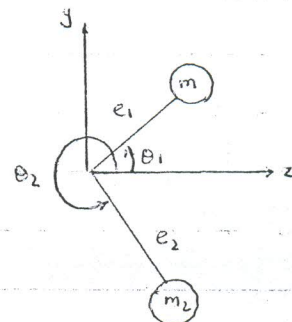
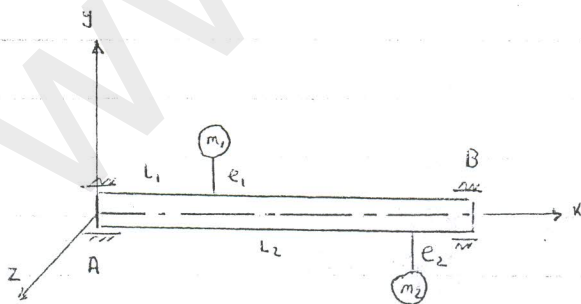
فرض کنید محور در AB روی دریا تا آن A و B قرار دارد، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف

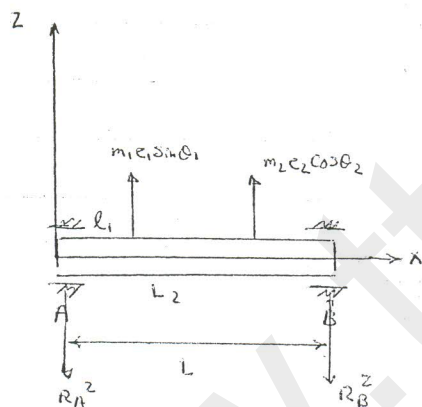
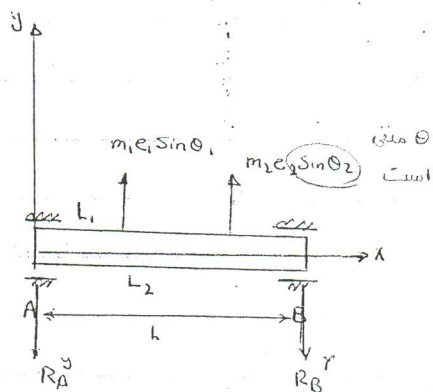
می باشد. به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, l_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, l_2, \theta_2)$

می باشد. در اثر دوران محور، عکس العمل نیروهای گریز از مرکز، جرم های خارج از مرکز روی یا تان های A و B ایجاد می

جثتی نموده و دریا تا آن را چنانچه متعادل ننمایم از بین می برد.

هدف: بالاسن محور در آن نوع روی یا تان های A و B می باشد.





در صفحه $x-y$:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1 e_1 \sin \theta_1 + m_2 e_2 \sin \theta_2 - R_B^y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_1 e_1 \sin \theta_1 l_1 + m_2 e_2 \sin \theta_2 l_2 - R_B^y l = 0$$

از روابط بالا R_A^y و R_B^y را می‌توانیم بیابیم

در صفحه $x-z$:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_A^z + m_1 e_1 \cos \theta_1 + m_2 e_2 \cos \theta_2 - R_B^z = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -m_1 e_1 \cos \theta_1 l_1 - m_2 e_2 \cos \theta_2 l_2 + R_B^z l = 0$$

8c

از دو محله‌ی بی هم R_A^Z و R_B^Z محاسبه می شود

$$R_A = \sqrt{R_A^Y^2 + R_A^Z^2} = m_A e_A$$

$$\tan \theta_A = \frac{R_A^Y}{R_A^Z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1} \frac{R_A^Y}{R_A^Z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یا تانگ A جرم و بازتابی مناسب در شتاب مناسب تری هم

$$R_B = \sqrt{R_B^Y^2 + R_B^Z^2} = m_B e_B$$

$$\tan \theta_B = \frac{R_B^Y}{R_B^Z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1} \frac{R_B^Y}{R_B^Z}$$